Εισαγωγή στις διαφορικές εξισώσεις 25-11-19

<u>Παράδειγμα 7:</u> $(2x+1)y''-4(x+1)y'+4y=0 \ , x>-\frac{1}{2}$

$y_1=e^{cx}$

<u>Λύση:</u>

$y_1(x)=e^{cx} \ , x>-\frac{1}{2}$

Είναι λύση αν-ν $(2x+1)c^2 e^{cx}-4(x+1)c\cdot e^{cx}+4e^{cx}=0$

$(2c^2-4c)x+c^2-4c+4=0.$

$\Rightarrow 2c^2-4c=0$ κ' $c^2-4c+4=0$

$\Rightarrow c=2.$

$$y_2(x)=y_1(x)\cdot\int_0^x \frac{1}{y_1(t)}(2t+1)\exp\left[-\int_0^t \frac{-4(s+1)}{2s+1}ds\right]dt$$

$$=\ldots=e^{2x}-x-1 \ , x>-\frac{1}{2}$$

Από θεώρημα 10 είναι ένα β.σ.λ.

και γενικός τύπος λύσεων

$$y(x)=c_1\cdot e^{2x}+c_2(x+1)$$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 8</u>: (Αντίστροφο ορίζουσας Wronski.
Ας είναι y_k $(k=1,\ldots,n)$ n συναρτήσεις που έχουν συνεχείς παραγώγους n-τάξης στο I και ας υποθ. ότι $W(y_1,\ldots,y_n)(x)\neq 0$ για όλα τα $x\in I$. Τότε υπάρχει μοναδική ~~ο~~ ομογενή

γραμμική διαφ. εξίσωση n-τάξης (E_0)
με $\alpha_n = 1$ που έχει το $\{y_1, \dots, y_n\}$ ως Β.σ.λ.

$$\frac{w(y_1, \dots, y_n, y)}{w(y_1, \dots, y_n)} = 0.$$

~~Εφαρμογές~~

Εφαρμογές: ρυθμ. μεταβολής (διασπάσεις υλικών)

$$m'(t) + k m(t) = 0, \quad k \text{ σταθ.}$$

$$m(t) = m(t_0) \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} k \, ds} = m(t_0)\, e^{-k(t-t_0)}$$

ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ Γ.Δ.Ε (με σταθ. συντελεστές)

$$\alpha_n y^{(n)} + \dots + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = 0 \quad , \alpha_i \in \mathbb{C}, \ m \neq 0$$

$$y(x) = e^{\lambda x}, \ x \in \mathbb{R}$$

$$\alpha_n \lambda^n \cdot e^{\lambda x} + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \dots + \alpha_1 \lambda e^{\lambda x} + \alpha_0 \cdot e^{\lambda x} = 0$$

$$e^{\lambda x} (\alpha_n \lambda + \dots + \alpha_0) = 0$$

πχ) $y'' + 2y' + y = 0$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

ή $y'' - 5y + 6y = 0$

χαρακτ. πολυων. $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$ ~~άρα~~

άρα e^{2x} ή e^{3x}

__ΘΕΩΡΗΜΑ 19__
Ας είναι $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ διακεκριμένες ρίζες πολλ/τας $m_1, \ldots, m_s$ αντίστοιχα του χ.π. P ομογενούς γ.δ.ε (E_n^0). Τότε οι n συναρτήσεις
$$y_{ij}(x) = x^j e^{\lambda_i x}, \quad j = 0, \ldots, m_i - 1, \quad i = 1, \ldots, s$$
αποτελούν ένα β.σ.λ. της (E_n^0)

π.χ. $P(\lambda) = (\lambda-2)^3(\lambda+3)^2(3\lambda-1) = 0$
$$\left.\begin{array}{ll} \lambda_1 = 2 & m_1 = 3 \\ \lambda_2 = -3 & m_2 = 2 \\ \lambda_3 = 1/3, & m_3 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} e^{2x}, x e^{2x} \\ e^{-3x}, x e^{-3x} \\ e^{\frac{1}{3}x} \end{array}\right.$$

__ΘΕΩΡΗΜΑ 20__ Ας υποθέσουμε ότι οι συντελεστές a_i $\{i = 0, 1, \ldots, n-1, n\}$ είναι πραγματικοί. Τότε για ομογενή γ.δ.ε

(i) Αν y είναι μια λύση τότε $\operatorname{Re} y$ και $\operatorname{Im} y$ είναι επίσης λύσεις.

(ii) καθε λύση με πραγματικές αρχικές τιμές είναι πραγματική

(iii) Αν $\{y_1, \ldots, y_n\}$ είναι β.σ. πραγματικών λύσεων τότε y είναι πραγματική λύση αν-ν υπάρχουν πραγμ. σταθ. c_k $(k = 1, \ldots, n)$: $y = c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n$

(iv) Ας είναι $\lambda_1 = \sigma_1 + i\tau_1, \ldots, \lambda_r = \sigma_r + i\tau_r$ με $\sigma_i, \tau_i \in \mathbb{R}$ και $\tau_i \neq 0$ $(i = 1, \ldots, r)$ διακεκριμ. λύσεις του χαρακτ. πολυωνύμου με πολ/τα $m_1, \ldots, m_r$ αντίστοιχα και $\lambda_{2r+1}, \ldots, \lambda_s$ διακεκριμένη πραγμ. ρίζες του χαρακτ. πολυωνύμου με πολ/τες $m_{2r+1}, \ldots, m_s$ αντίστοιχα τότε οι παρακάτω

η συναρτήσεις αποτελούν ένα βασικό σύνολο
πραγμ. λύσεων

$x^j e^{\sigma_i x} \cos \tau_i x, x \in \mathbb{R}$

και $x^j e^{\sigma_i x} \sin \tau_i x, x \in \mathbb{R}$

$x^j e^{\lambda_i x}, x \in \mathbb{R}$

Παρ. 2 | 117

(iii) $y''' - y'' - y' + y = 0$

$P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$

$\Rightarrow \lambda^2(\lambda - 1) - (\lambda - 1) = 0$

$\Rightarrow (\lambda^2 - 1)(\lambda - 1) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1, m_1 = 2$
$\lambda_2 = 1, m_1 = 1$
$\Rightarrow \begin{cases} e^x, x \cdot e^x \\ e^{-x} \end{cases}$

(iv) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

$P(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 + 1)^2$ $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$

$m_1 = m_2 = 2$

$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{e^{2x}} \cos x & \cancel{e^{2x}} \sin x \\ x \cos x & x \sin x \end{cases}$

ΑΣΚΗΣΗ 2

(i) $y'' - 2y' + y = 0$ $\quad y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

Χ.Π $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$

$\lambda = 1 \quad m = 2$

$\Rightarrow$ Β.σ.λ $\{e^x, x \cdot e^x\}$

$y(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 x \cdot e^x, \; x \in \mathbb{R}$

$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

$y'(0) = 1 \Rightarrow c_2 (e + e) = 1 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2e}$

(ii) $y'' + 4y = 0$ // $y(\frac{\pi}{4}) = 1 \quad y'(\frac{\pi}{4}) = 0$

$P(\lambda) = \lambda^2 + 4 \Rightarrow \lambda = \pm 2i$

$\Rightarrow$ Β.σ.λ: $\{\cos 2x, \sin 2x\}$

$y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$

$y(\frac{\pi}{4}) = 1 \Rightarrow c_1 \cdot \cos\frac{\pi}{2} + c_2 \cdot \sin\frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow c_2 = 1$

$y'(\frac{\pi}{4}) = 0 \Rightarrow \ldots c_1$

Εξίσωση Euler $\alpha_n x^n y^{(n)} + \ldots + \alpha_1 x y' + \alpha_0 y = 0$

$x \neq 0$

$\alpha_i \in \mathbb{R}, \; \alpha_n \neq 0$

$x > 0 \quad t = \log x$

ΑΣΚΗΣΗ 6/114:

(i) $x^2y'' - xy' + y = 0 \quad , x > 0$

$y' = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \Rightarrow xy' = \frac{\partial y}{\partial t}$

$y'' = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\frac{\partial y}{\partial t}\right)$

$= -\frac{1}{x^2}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)$

$= -\frac{1}{x^2}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{1}{x}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\frac{\partial t}{\partial x}$

$= -\frac{1}{x^2}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{x^2}\left[-\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial t}\right]$

$\Rightarrow x^2 y'' = -\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

$-\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial y}{\partial t} + y = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 2\frac{\partial y}{\partial t} + y = 0$

$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \mu_1 = 2$

Β.σ.λ $\{e^t, te^t\} \Rightarrow \{e^{\log x}, \log x \cdot e^{\log x}\}$

$\Rightarrow \{x, x\log x\}$

(I) $\boxed{B. 4.3}$

$y'' - 2by' + cy = 0$ // Αν $y(0) = y(1) = 0$ τότε $y(\ell) = 0, \ell \in \mathbb{N}$.

$P(\lambda) = \lambda^2 - 2b\lambda + c = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2b \pm \sqrt{4b^2 - 4c}}{2} = b \pm \Delta i$$

$\{e^{bx}\cos\Delta x,\ e^{bx}\sin\Delta x\}$

$y(x) = c_1 \cdot e^{bx}\cos\Delta x + c_2 e^{bx}\sin\Delta x$

$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

$y(1) = 0 \Rightarrow c_2 \cdot e^{b}\sin\Delta = 0 \Rightarrow \sin\Delta = 0 \Rightarrow \Delta = k\pi$

άρα $y(x) = c_2 e^{bx}\sin(xk\pi)$

για $y(n) = c_2 \cdot e^{bn}\sin(nk\pi) = 0$.

B-29 : $y^{(5)} + y^{(4)} + \dots + y' + y = 0$

$P(\lambda) = \lambda^5 + \dots + 1 = 0 \xrightarrow{\lambda \neq 1} \frac{\lambda^6 - 1}{\lambda - 1} = 0 \Rightarrow \lambda^6 = 1$

ΓΕΝΙΚΑ $z^\nu = 1$: $z = \cos\frac{2k\pi}{\nu} + i\,\frac{\sin 2k\pi}{\nu}$